SEMINARIO DI ANALISI MATEMATICA
DIPARTIMENTO DI MATEMATICA DELL'UNIVERSITA' DI BOLOGNA

E. OBRECHT

SPAZI DI INTERPOLAZIONE CONNESSI CON EQUAZIONI DIFFERENZIALI DI ORDINE SUPERIORE IN UNO SPAZIO DI BANACH

20 FEBBRAIO 1987

1. INTRODUZIONE

E' ben noto come la teoria dell'interpolazione reale si sia rivelata uno strumento efficace nello studio di numerose questioni relative a equazioni differenziali (lineari e non lineari) del primo ordine in uno spazio di Banach.

Analoghi problemi si presentano naturalmente anche per equazioni differenziali di ordine superiore, quali, ad esempio

$$(1) \qquad u^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} A_k u^{(k)} = f ,$$

dove gli A_k sono operatori lineari chiusi in uno spazio di Banach X e f è una funzione di una variabile reale a valori in X.

Nel caso delle equazioni del primo ordine, gli spazi che si rivelano proficui risultano essere quelli di interpolazione fra lo spazio ambiente e il dominio dell'operatore che compare nell'equazione. Nel caso dell'equazione (1) sarà quindi ragionevole considerare degli spazi che siano di interpolazione fra n+1 spazi: lo spazio ambiente e i domini degli n operatori che intervengono nell'equazione.

La teoria dell'interpolazione reale fra più di due spazi è stata studiata in due ponderosi lavori da Yoshikawa [3], che ha considerato spazi di medie, e da Sparr [2], che ha considerato spazi definiti con il metodo K e il metodo J.

Entrambi questi autori considerano spazi di interpolazione fra n spazi che dipendono da n parametri (legati da un vincolo opportuno). Questo tipo di definizione appare la più indicata nella situazione generale, quando cioè non si presuppone nessun legame di inclusione fra i diversi spazi fra i quali si interpola. Se invece si hanno in mente applicazioni a una equazione come la (1), si verifica spesso (sempre se essa viene supposta parabolica) che $\mathcal{D}(A_k) \subseteq \mathcal{D}(A_{k+1})$ algebricamente e topologicamente.

In tal caso, è ragionevole (e più semplice) definire degli spa-

zi di interpolazione che dipendono da un solo parametro. In questo modo si evitano anche la patologie incontrate sia da Yoshikawa sia da Sparr e cioè che metodi di interpolazione reali diversi possono portare a spazi di interpolazione diversi, a differenza di quanto accade per l'interpolazione fra due spazi.

2. DEFINIZIONE DEGLI SPAZI DI INTERPOLAZIONE E LORO PROPRIETA'

Pur potendo dare una definizione equivalente indipendente dal fatto che gli spazi fra i quali si interpola siano i domini di operatori con opportune proprietà, preferisco utilizzare una definizione nella quale il legame con la (1) sia più evidente. Faccio quindi delle ipotesi preliminari.

Siano $n \in N$, X uno spazio di Banach e $A_0, \dots, A_{n-1}$ n operatori lineari in X.

Poniamo, $\forall \lambda \in K$ (campo degli scalari relativo a X)

$$P(\lambda)x = \lambda^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k A_k x \ , \quad x \in Y_0 \equiv \bigcap_{k=0}^{n-1} \mathscr{D}(A_k).$$

<u>Ipotesi I</u>. Gli operatori $A_i (i=0,\dots n-1)$ sono chiusi e $\forall s \in R^+ \cup \{0\}$, $P(s)$ è un operatore invertibile con inverso $P^{-1}(s)$ limitato e definito in tutto X. Inoltre supporrò che $\exists M \in R^+$, tale che

$$\|P^{-1}(s)\| \leq M(1+s)^{-n} \ ,$$

$$\|A_k P^{-1}(s)\| \leq M(1+s)^{-k}, \ k=0,\dots,n-1,$$

$\forall s \in R^+ \cup \{0\}$.

Osservo esplicitamente che gli operatori A_i non sono stati supposti a dominio denso in X.

Dall'Ipotesi I si ha che, $\forall x \in X$, $\forall s \in R^+ \cup \{0\}$,

$$\|s^k A_k P^{-1}(s)x\| \leq M, \quad k=0,\dots,n-1,$$

mentre, se $y \in Y_0$, risulta:

$$s^k A_k P^{-1}(s)u = s^{k-n} A_k P^{-1}(s)(P(s) - \sum_{h=0}^{n-1} s^h A_h)y =$$

$$= s^{k-n} A_k y - \sum_{h=0}^{n-1} s^{k+h-n} A_k P^{-1}(s) A_h y,$$

onde $\|s^k A_k P^{-1}(s)y\| \leq C\, s^{-1}$, $k = 0,\dots,n-1$.

Questa osservazione giustifica la seguente

Definizione. Siano $\alpha \in]0,1[$, $q \in [1,+\infty]$. Indichiamo con $D_P(\alpha,q)$ lo spazio vettoriale degli $x \in X$, tali che la funzione

$$s^{\alpha+k} A_k P^{-1}(s)x \in L^q_*\,(R^+;X), \quad k=0,\dots,n-1.$$

Qui e nel seguito con $L^q_*(R^+;X)$ indichiamo lo spazio di Banach delle funzioni definite su R^+ e a valori in X, fortemente misurabili e tali che

$$|x|_{\alpha,q} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \left(\int_0^{+\infty} \|s^{\alpha+k} A_k P^{-1}(s)x\|^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} <+\infty \ , \quad \text{se } q<+\infty,$$

$$|x|_{\alpha,\infty} \equiv \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname*{ess\,sup}_{s \in R^+} \|s^{\alpha+k} A_k P^{-1}(s)x\| <+\infty \quad \text{,se } q=+\infty.$$

Osservazioni 1. Se $n=1$, lo spazio ora definito coincide evidentemente con l'usuale spazio di interpolazione reale $(\mathscr{D}(A_0),\dot{X})_{1-\alpha,q}$, dove $\mathscr{D}(A_0)$ si intende munito della norma del grafico.

2. Osserviamo esplicitamente che, in virtù dell'Ipotesi I, $\|s^{\alpha+k} A_k P^{-1}(s)\| \leq M s^{\alpha}$, onde la condizione che compare nella definizione preceden

te limita il comportamento degli operatori $A_kP^{-1}(s)$ solo a $+\infty$, mentre vicino a zero le condizioni richieste sono automaticamente soddisfatte.

Dall'osservazione precedente segue subito che

$$D_P(\alpha_2,q) \subseteq D_P(\alpha_1,q), \quad \text{se } \alpha_1 < \alpha_2. \tag{2}$$

Per ottenere relazioni di inclusioni più forti dalla (2) si può far ricorso al seguente risultato, ovvio se $q = +\infty$, ma non facile da dimostrare se q è reale.

<u>Lemma 1.</u> Sia $x \in D_P(\alpha,q)$; allora $\exists C \in R^+$, tale che

$$\|s^{\alpha+k}A_kP^{-1}(s)x\| \leq C\,|x|_{\alpha,q}\quad, \quad k=0,\dots,n-1.$$

Dal Lemma 1, con alcune manipolazioni, si ottiene il risultato seguente.

<u>Proposizione 1.</u>

a) Se $q_1<q_2$, allora $D_P(\alpha,q_1) \subseteq D_P(\alpha,q_2)$;

b) Se $\alpha_1<\alpha_2$, allora $D_P(\alpha_2,r) \subseteq D_P(\alpha_1,q)$, $\forall q,r \in [1,+\infty]$

E' particolarmente importante stabilire dalle relazioni di inclusione fra gli spazi $D_P(\alpha,q)$ e i domini degli operatori A_k.

Il seguente risultato non è banale solo se Y_0 non è denso in X.

<u>Teorema 1.</u> Posto $Y_n = \bar{Y}_0^X$ (la chiusura di Y_0 nella topologia di X), risulta

$$D_P(\alpha,q) \subseteq Y_n, \quad \forall \alpha \in]0,1[, \ \forall q \in [1,+\infty].$$

Dimostrazione. Sia $y \in D_p(\alpha,q)$. Si ha, $\forall s \in R^+$:

$$s^n P^{-1}(s)y-y = -\sum_{k=0}^{n-1} s^k A_k P^{-1}(s)y.$$

L'ultima somma scritta si maggiora in norma, grazie al Lemma 1, con $Cs^{-\alpha}|y|_{\alpha,q} \xrightarrow[s\to+\infty]{} 0$. Poiché $s^n P^{-1}(s)y \in Y_0$, $\forall s \in R^+$, si ha l'asserto.

Senza ipotesi ulteriori, non è possibile determinare uno spazio che sia contenuto nei $D_p(\alpha,q)$, ad eccezione dell'inclusione ovvia $Y_0 \subseteq D_p(\alpha,q)$. Consideriamo, per esempio l'equazione delle onde con attrito

$$\begin{cases} (\partial_t^2 + \beta\partial_t - \Delta)u = 0 & , \text{ in } \Omega, \\ u/_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

dove $\beta \in R$. In questo caso avremo, scegliendo $X = L^q(\Omega)$,

$$\mathscr{D}(A_0) = W^{2,q}(\Omega) \cap W_0^{1,q}(\Omega)$$

$$(A_0u)(x) = -\Delta u(x),$$

$$\mathscr{D}(A_1) = L^q(\Omega),$$

$$(A_1u)(x) = \beta u(x).$$

Si può riconoscere che l'Ipotesi I è soddisfatta se $\beta > -\delta$ ($\delta \in R^+$ opportuno) e che se $\alpha \notin \{\frac{1}{2}, \frac{1}{2q}\}$,

$$D_p(\alpha,q) = (\mathscr{D}(A_0), L^q(\Omega))_{1-\alpha,q} = \begin{cases} W^{2\alpha,q}(\Omega), \text{ se } \alpha < \frac{1}{2q}, \\ \{u \in W^{2\alpha,q}(\Omega); u/_{\partial\Omega}=0\}, \text{ se } \alpha > \frac{1}{2q}. \end{cases}$$

Per provare inclusioni non banali degli spazi $D_p(\alpha,q)$ faremo un'ipotesi ulteriore, premettendo alcune definizioni.

Poniamo

$$X_k = \bigcap_{h=k}^{n-1} \mathscr{D}(A_k), \text{ munito della norma } \|x\|_k = \sum_{h=k}^{n-1} \|A_h x\|,$$

$$Y_k = \bar{Y}_o^{X_k} \quad , \quad k=1,\dots,n-1.$$

Poniamo poi, se $y \in Y_{n-1}$, $\phi \in Y_o$ e $t \in R^+$:

$$L_{n-1}(t,y,\phi) = \sum_{k=0}^{n-2} t^{n-k-1}\|\phi\|_k + \|y-\phi\|_{n-1} + \frac{1}{t}\|y-\phi\|,$$

$$L_{n-1}(t,y) = \inf\{L_{n-1}(t,y,\phi); \phi \in Y_o\}.$$

Ipotesi II. $\limsup_{t\to o+} L_{n-1}(t,y) < +\infty, \quad \forall y \in Y_{n-1}.$

Questa è una condizione di tipo Brêzis-Fraenkel [1]; infatti questi autori hanno provato che, se $y \in Y_{n-1}$, la condizione

$$\lim_{t\to o+} L_{n-1}(t,y) = 0$$

è necessaria e sufficiente affinché esista

$$u \in \bigcap_{j=0}^{n} C^{(j)}([0,1];Y_j), \quad \text{tale che } u'(0) = y.$$

Ebbene, è possibile dare, attraverso opportuni spazi di interpolazione, una caratterizzazione quasi completa degli spazi che soddisfano l'Ipotesi II. Per semplificare l'esposizione mi limiterò al caso $n=2$.

Teorema 2. Se $\limsup_{t\to o+} L_1(t,y)<+\infty$, allora, qualunque sia la topologia in Y_1, risulta $y \in (Y_o,Y_2)_{\frac{1}{2},\infty}$. Viceversa, se $y \in (Y_o,Y_2)_{\alpha,q}$, con

$q \in [1,+\infty]$ e $\alpha \leq \frac{1}{2}$, allora $\limsup_{t\to 0+} L_1(t,y) < +\infty$, se si prende come Y_1 lo spazio $(Y_0,Y_2)_{\alpha,q}$. Di più, se X_0 e X_1 sono densi in X, allora risulta $\lim_{t\to 0+} L_1(t,y) = 0$.

Se, invece, manca la densità e $\lim_{t\to 0+} L_1(t,y) = 0$, allora $y \in (Y_0,Y_2)_{\frac{1}{2}}$, dove lo spazio di interpolazione continua $(Y_0,Y_2)_{\frac{1}{2}}$ è la chiusura di Y_0 in $(Y_0,Y_2)_{\frac{1}{2},\infty}$. Viceversa se $y \in (Y_0,Y_2)_{\alpha}$, con $\alpha \leq \frac{1}{2}$, allora $\lim_{t\to 0} L_1(t,y) = 0$ se si prende come Y_1 lo spazio $(Y_0,Y_2)_{\alpha}$.

Si ha allora:

<u>Teorema 3.</u> a) Se valgono le Ipotesi I e II, allora $Y_{n-1} \subseteq D_p(\alpha,q)$, $\forall \alpha \in]0,1[$ e $\forall q \in [1,+\infty]$.

b) Se $n=2$, vale solo l'Ipotesi I ed $\exists \beta \in]\alpha,1[$, tale che $Y_1 \subseteq (Y_0,Y_2)_{1-\frac{\beta}{2},\infty}$, allora $Y_1 \subseteq D_p(\alpha,q)$, $\forall q \in [1,+\infty]$; se $q=+\infty$, si può prendere $\beta = \alpha$.

I teoremi 2 e 3 ci assicurano quindi che gli spazi $D_p(\alpha,q)$ contengono Y_{n-1} se questo spazio non è troppo piccolo rispetto agli altri.

Per studiare ulteriori proprietà degli spazi $D_p(\alpha,q)$, abbiamo bisogno della seguente caratterizzazione come spazi di medie.

<u>Teorema 4.</u> $D_p(\alpha,q)$ coincide con l'insieme delle $y \in X$, tali che esista $u : R^+ \to X$ fortemente misurabile, tale che:

a) $u(t) \in Y_0$ q.d. in R^+;

b) $t^{\alpha-n+k} u \; L^q_*(R^+;Y_k)$, $k=0,\dots,n$;

c) $\int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t} = y$.

Inoltre, la norma in $D_p(\alpha,q)$ è equivalente alla

$$\|y\|_{S_{\alpha,q}} \equiv \inf\{\sum_{k=0}^{n} \|t^{\alpha-n+k}u\|_{L_*^q(R^+;Y_k)} \quad ; \quad u \text{ soddisfacente ad } a)-b)-c)\}.$$

Con tale caratterizzazione si possono provare facilmente i risultati seguenti:

Teorema 5. Sia X' uno spazio di Banach e siano $A'_0,\dots,A'_{n-1}$, degli operatori in X', tali che, posto $P'(s) = \sum_{k=0}^{n-1} s^k A'_k$, valga anche per P' l'Ipotesi I. Allora, se $T\in\mathscr{L}(X,X')$ e $T/_{X_k}\in\mathscr{L}(X_k,X'_k)$, risulta $T/_{D_p(\alpha,q)}\in$ $\in\mathscr{L}(D_p(\alpha,q);\ D_{p'}(\alpha,q))$.

Teorema 6. Se $q<+\infty$, Y_0 è denso in $D_p(\alpha,q)$. Se $q = +\infty$, la chiusura di Y_0 in $D_p(\alpha,\infty)$ è l'insieme $D_p(\alpha) \equiv \{y\in X \mid \lim_{s\to+\infty} s^{\alpha+k}A_kP^{-1}(s)y = 0,$ $k=0,\dots,n-1\}$.

Questi spazi possono essere caratterizzati anche con un altro tipo di spazi di medie e con i funzionali K e J.

Poniamo, $\forall t\in R^+$ e $\forall x\in Y_n$:

$$K(t,x) = \inf\{\sum_{j=0}^{n} t^{j-n+1}\|x_j\|_j \ ;\ x_j\in Y_j, j = 0,\dots,n,\ \sum_{j=0}^{n} x_j=x\}.$$

Osserviamo esplicitamente che la funzione

$$t \to t^{n-1} K(t,x)$$

è crescente e concava in R^+.

Analogamente, $\forall t\in R^+$ e $\forall y\in Y_0$, poniamo

$$J(t,y) = \max\{t^{j-n+1}\|y\|_j \; ; \; j = 0,\ldots,n\} .$$

Si ha allora:

Teorema 7. Lo spazio $D_p(\alpha,q)$ è isomorfo ai seguenti, muniti delle norme naturali:

a) $\{y \in Y_n; \; \exists V_0, V_1 : R^+ \to Y_n$ fortemente misurabili, $V_0(t) + V_1(t) = y$ q.d. in R^+, $t^\alpha V_1 \in L^q_*(R^+, Y_n)$, $t^{\alpha-n+j} V_0(t) \in L^q_*(R^+; Y_j)$, $j=0,\ldots,n-1\}$;

b) $\{y \in Y_n; \; t^{\alpha-1} K(t,y) \in L^q_*(R^+; Y_n)\}$;

c) $\{y \in Y_n; \; \exists u : R^+ \to Y_n$ fortemente misurabile, $u(t) \in Y_0$ q.d. in R^+, $\int_0^{+\infty} u(t) \frac{dt}{t} = y$, $t^{\alpha-1} J(t, u(t)) \in L^q_*(R^+; Y_n)\}$.

Osserviamo come gli spazi di Yoshikawa, analoghi a quelli definiti nei Teoremi 4 e 7a), possano non essere equivalenti, così come gli spazi di Sparr definiti con i funzionali K e J.

3. UN'ALTRA CLASSE DI SPAZI DI INTERPOLAZIONE

Come abbiamo visto, gli spazi $D_p(\alpha,q)$, se valgono le Ipotesi I e II, sono compresi fra Y_{n-1} e Y_n. E' pertanto opportuno definire degli altri spazi di interpolazione che siano contenuti in Y_{n-1}.

Per limitare gli aspetti tecnici della questione, considererò solo il caso n=2.

<u>Definizione</u>. Se $\alpha \in]0,1[$, $q \in [1,+\infty]$, poniamo

$$D_p(\alpha+1,q) = \{x \in Y_1;\ A_1 x \in D_p(\alpha,q)\}.$$

E' facile verificare che questi sono spazi di interpolazione fra gli X_k, nel senso del Teorema 5.

Si ha il seguente risultato di inclusione.

<u>Teorema 8.</u> Se $Y_0 \subseteq \{y \in Y_1;\ A_1 y \in Y_1\}$ e vale l'Ipotesi II, allora $Y_0 \subseteq D_p(\alpha+1,q)$, $\forall \alpha \in]0,1[$ e $\forall q \in [1,+\infty]$.

Questo risultato asserisce dunque che Y_0 è contenuto in tutti i $D_p(\alpha+1,q)$ se Y_1 non è troppo piccolo; in sostanza è una richiesta di tipo opposto a quella dell'Ipotesi II.

Se poi $n>2$, è chiaro come si possano definire degli ulteriori spazi di interpolazione che saranno compresi, sotto ipotesi analoghe alle precedenti, fra Y_k e Y_{k+1}.

Mostrerò ora un esempio molto semplice in cui tutte le condizioni di inclusione sono soddisfatte. Consideriamo il problema

$$\begin{cases} (\partial_t^2 - \alpha\partial_t \Delta_x + \Delta_x^2)u = f & , \text{ in } [0,T] \times \Omega, \\ u(t,x) = \Delta_x u(t,x) = 0 & , \text{ in } [0,T] \times \partial\Omega, \\ u(0,x) = u_0(x) & , \text{ in } \Omega, \\ \partial_t u(0,x) = u_1(x) & , \text{ in } \Omega. \end{cases}$$

Sia $p \in]1,+\infty[$ e poniamo: $X = L^p(\Omega)$,

$$Y_0 = \{u \in W^{4,p}(\Omega) \; ; \; u/_{\partial\Omega} = \Delta u/_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$(A_0 u)(x) = \Delta^2 u(x),$$

$$Y_1 = X_1 = \{u \in W^{2,p}(\Omega) \; ; \; u/_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$(A_1 u)(x) = -\alpha\Delta\, u(x).$$

Poiché $(Y_0,X)_{\frac{1}{2},\infty} = \{u \in B^2_{p,\infty}(\Omega);\ u/_{\partial\Omega}=0\} \supseteq X_1$, tutti gli spazi $D_p(\alpha,q)$ sono contenuti in Y_1. Inoltre, poiché

$$\{u \in Y_1 ; A_1 u \in Y_1\} = \{u \in W^{4,p}(\Omega);\ u/_{\partial\Omega} = \Delta u/_{\partial\Omega}=0\}=Y_0,$$

tutti gli spazi $D_p(\alpha+1,q)$ sono contenuti in Y_0.

BIBLIOGRAFIA

[1] J. BREZIS-L.E. FRAENKEL, A function with prescribed initial derivatives in different Banach Spaces, J. Funct. Anal., 29 (1978), pp. 328-335.

[2] G. SPARR, Interpolation in several Banach spaces, Ann. Mat. Pura Appl., (4) 99 (1974), pp. 247-316.

[3] A. YOSHIKAWA, Sur la théorie d'espaces d'interpolation-les espaces de moyenne de plusieurs espaces de Banach, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. IA, 16 (1970), pp. 407-468.